

ELEKTROSTATIKA

1. Kratak istorijski uvod

Prva ljudska saznanja o elektricitetu potiču još iz antičkog doba, kada je oko 600. godine pre naše ere grčki filozof Tales iz Mileta opisao pojavu da tvrda, žuta smola čilibar (na grčkom *elektron*) ima interesantnu osobinu da kada se protare vunom tkaninom privlači lake deliće materije (slamu, suvo lišće, komadiće lanenog platna, itd.). Mnogo kasnije, usvojeno je da sama reč *elektricitet* označava prisustvo naročitog fizičkog agensa na telima koji izaziva određene pojave, među koje spada i pomenuto privlačenje lakih tela. Za svako telo kod koga se može zapaziti prisustvo takvog agensa kaže se da je *naelektrisano*. Inače, samu reč "*elektricitet*" (koja u slobodnom prevodu znači "načilibarisavanje") u nauku je oko 1600. godine uveo engleski naučnik Viljem Džilbert.

Osim čilibara, trenjem se mogu naelektrisati još i staklo, porculan, tvrda guma, razne vrste smola, itd. Istorijski gledano, najstariji način naelektrisavanja tela je putem *trenja*, koje predstavlja samo vid naelektrisavanja dodiranjem.

Tela se mogu naelektrisati i pomoću *elektrostatičke indukcije ili influencije* (=uticaj, upliv, delovanje), koja se primenjuje za naelektrisavanje metala.

Danas se materijali u električnom pogledu dele prema *spособnosti provođenja elektriciteta* u sledeće tri grupe:

- *Provodnici* (metali kao *provodnici prve* i elektrolitički rastvori kao *provodnici druge vrste*)
- *Poluprovodnici*
- *Dielektrici, ili izolatori*.

Mada idealni provodnici i izolatori ne postoje, u savremenoj praksi usvojeno je da se izolatorima smatraju svi materijali čija je specifična otpornost $\rho > 10^5 [\Omega \text{cm}]$, poluprovodnicima materijali kod kojih je $10^{-3} [\Omega \text{cm}] < \rho < 10^5 [\Omega \text{cm}]$, a provodnicima materijali sa $\rho < 10^{-3} [\Omega \text{cm}]$.

Posmatranjem uzajamnog mehaničkog dejstva naelektrisanih tela, ustanovljeno je postojanje privlačnih i odbojnih sila. To je i dovelo do pretpostavke o *dve vrste* naelektrisanja: "*staklastog*" koje odgovara pozitivnom naelektrisanju staklene šipke protrljane svilenom tkaninom i "*smolastog*" koje odgovara negativnom naelektrisanju ebonitne šipke protrljane krznom, ili vunom tkaninom.

Nasuprot dualističkoj hipotezi o prirodi elektriciteta (postojanje dve različite vrste naelektrisanja), američki naučnik Bendžamin Frenklin, postavio je unitarističku hipotezu po kojoj u prirodi postoji samo jedna vrsta elektriciteta. Višak naelektrisanja na nekom telu Frenklin je označavao sa "+", a manjak sa "-", što odgovara staklastoj, odnosno smolastoj vrsti naelektrisanja, respektivno.

Ipak, kod obe pomenute hipoteze zajedničko je bilo to što je elektricitet smatran *kontinualnim nestišljivim fluidom*. Međutim, savremena nauka o elektricitetu eksperimentalno je utvrdila da elektricitet ima *diskretnu, a ne kontinualnu strukturu* i da se u prirodi javlja u elementarnim (nedeljivim) pozitivnim i negativnim iznosima (kvantima) kao i njihovim celobrojnim umnošcima.

Telo neutralno u električnom pogledu, ima podjednak broj protona i elektrona. Za telo sa manjkom elektrona kaže se da je pozitivno, a za telo sa viškom elektrona da je negativno naelektrisano.

► *Fizička veličina* koja opisuje stepen, odnosno meru naelektrisanosti nekog tela, zove se *količina elektriciteta, količina naelektrisanja, ili električno opterećenje*. Količina elektriciteta je skalarna, algebarska veličina, čija numerička vrednost govori, ili o višku, ili o manjku elektrona na nekom telu i označava se sa Q kada je vremenski konstantna, a sa q ako je vremenski promenljiva. Jedinica za količinu elektriciteta je *Kulon* [C] po francuskom istraživaču Kulonu. Danas je poznato da je svaka količina elektriciteta celobrojan umnožak *elementarne količine elektriciteta*, koja se zove *električni kvant* i brojačano je jednaka modulu naelektrisanja elektrona, tj. $|e|$, a samo naelektrisanje elektrona je $e \approx -1,602 \cdot 10^{-19}$ [C].

2. Naelektrisavanje (elektrizacija, elektrizovanje) tela

Sva tela se mogu neelektrisati na jedan od sledeća dva načina:

- Dodiranjem (trenjem)
- Elektrostatičkom indukcijom (ili influencijom).

Naelektrisanje tela trenjem predstavlja vid elektrizovanja dodirrom, pri čemu mehanički kontakt (trenje) služi jedino za realizaciju prisnijeg kontakta između tela koja se elektrizuju i time olakšava prelaz elektrona sa jednog tela na drugo. Trenjem se elektrizuju *dielektrična tela*, a elektrostatičkom indukcijom *metali*. Prema usvojenoj konvenciji, za naelektrisano telo sa manjkom elektrona kaže se da je naelektrisano pozitivno, a za telo sa njihovim viškom elektrona da je naelektrisano negativno.

Nelektrisanje metala putem elektrostatičke indukcije odvija se *bez kontakta* između nekog *prethodno već naelektrisanog tela* i neutralnog metalnog tela koje želimo da naelektrišemo. Taj vid elektrizovanja počiva na konceptu *elektrostatičkog polja* koje postoji u prostoru sa naelektrisanjima i koje razdvaja naelektrisanja u atomima i molekulima, produkujući *indukovana naelektrisanja* tj. *indukovana opterećenja*. Međutim, kada se *idealni* dielektrik nalazi u stranom električnom polju *umerenog intenziteta*, indukovana naelektrisanja obe vrste ostaju zarobljena unutar atoma i molekula pod dejstvom snažnih atomskih i molekularnih sila, pa se zato ta naelektrisanja zovu još i *vezana*, a nastala *mehanička deformacija* atoma i molekula zove se *polarizacija dielektrika*. Pri polarizaciji od neutralnih atoma i nepolarizovanih molekula nastaju *električni dipoli*. Ti dipoli su u vakuumu i slabe primarno polje. Međutim, kod supstancija koje već imaju polarizovane molekule, strano polje izaziva njihovu dodatnu polarizaciju i orijentaciju u pravcu polja.

- *Pojava kada bez ikakvog mehaničkog kontakta sa drugim naelektrisanim telima, u metalima i dielektricima dolazi do razdvajanja pozitivnih i negativnih opterećenja pod uticajem stranog električnog polja, a bez obzira na njihovu prethodnu električnu neutralnost, zove se elektrostatička indukcija, ili influencija.*

Principi raspodele opterećenja na metalnim telima: Kod metalnih tela (provodnika) u stanju elektrostatičke ravnoteže, naelektrisanja se uvek raspoređuju na površima tih tela u skladu sa sledeća četiri principa:

- U unutrašnjosti tela ne postoji elektrostatičko polje kao ni slobodno naelektrisanje.
- Ne postoji tangencijalna komponenta vektora jačine elektrostatičkog polja na površini tela.
- Naelektrisanja se na površima raspoređuju tako da je energija resultantnog elektrostatičkog polja minimalna (*Tomsonova teorema*).
- Kada se u sistem naelektrisanih metalnih tela unese strano neutralno metalno telo i/ili, metalno telo na nultom potencijalu, energija elektrostatičkog sistema se smanjuje.

3. Zakon o konzervaciji elektriciteta

Prema klasičnoj formulaciji zakona o konzervaciji (održanju, očuvanju) elektriciteta ukupan broj pozitivnih i negativnih električnih kvantova u prirodi je nepromenljiv. U današnje vreme ta je formulacija odbačena, pošto je eksperimentalno ustanovljeno da se iz γ -fotona velike energije može generisati par elektron-pozitron. Mase elektrona i pozitrona su jednake, a naelektrisanje pozitrona je $|e|$. Pozitron ne ulazi u postojani sastav materije jer ima vrlo kratko vreme života. Zato se danas zakonu o konzervaciji elektriciteta daje sledeća tačna formulacija:

- **Zakon o konzervaciji elektriciteta:** *Algebarska suma pozitivnih i negativnih naelektrisanja u prirodi je nepromenljiva. Elektricitet u prirodi nije moguće trajno niti stvoriti, a ni uništiti, već se on jedino može razdvajati u okviru tela i premeštati sa jednog tela na drugo.*

4. Kulonov zakon

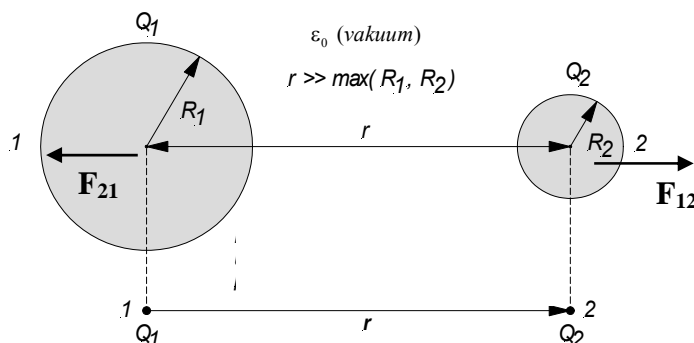
Polaznu tačku u proučavanju elektrostatičkih polja u vakuumu predstavlja *Kulonov zakon* koji je eksperimentalno otkriven još 1785. godine. Kulon je pomoću torziona vage određivao sile uzajamnog dejstva veoma udaljenih metalnih sfera u visokom vakuumu, naelektrisanih količinama elektriciteta Q_1 i Q_2 — menjajući naelektrisanja sfera i rastojanje r između njih, koje je uvek bilo znatno veće od poluprečnika sfera. Zbog toga je sfere bilo moguće smatrati *kvazipunktualnim telima* i tretirati ih kao *punktualna* (ili tačkasta) *naelektrisanja*.

- **Tačkasta ili punktualna naelektrisanja** su naelektrisana tela čije su dimenzije mnogo manje od rastojanja između njih.

Na sl. 1 prikazana su dva naelektrisana tela, dimenzija znatno manjih od rastojanja između njihovih težišta. Sila F uzajamnog dejstva *punktualnih naelektrisanja* Q_1 i Q_2 je privlačnog (odbojnog) karaktera kada su

naelektrisanja raznorodna (istorodna), a njen intenzitet $F=|F|$ direktno je srazmeran proizvodu modula naelektrisanja, a obrnuto kvadratu njihovog rastojanja:

$$F = k \cdot \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{r^2},$$



Sl. 1

gde fizička "konstanta" k za vakuum (a vrlo približno i za vazduh) ima vrednost $k=k_0=9 \cdot 10^9$ [Nm²/C²]. Eksperimentalno je dokazano da k jako zavisi od fizičkih osobina sredine u kojoj se procesi odvijaju. Kod racionalizovanog načina pisanja jednačina, "konstanta" k se piše u obliku $k=1/(4\pi\epsilon)$, gde je ϵ *dielektrična propustljivost* sredine, ili *permitivnost dielektrika*. Permitivnost vakuuma (a približno i vazduha kao dielektrika) iznosi $\epsilon_0 \approx 10^{-9}/(36\pi)$ [C²/(Nm²)], odnosno $\epsilon_0 \approx 10^{-9}/(36\pi)$ [F/m], gde je [F] – *Farad* jedinica za *električnu kapacitivnost*. Bezdimenziona veličina $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ zove se *relativna permitivnost* dielektrika. Na osnovu najtačnijih rezultata merenja brzine svetlosti u vakuumu c_0 za permitivnost vakuuma se dobija $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ [F/m].

Neka je vektor položaja drugog punktualnog naelektrisanja u odnosu na prvo $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}$, a prvog u odnosu na drugo $\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}$ (sl. 1). Takođe, neka je $r = |\mathbf{r}|$. Sa \mathbf{F}_{12} označimo elektrostatičku ili Kulonovu silu koja deluje na punktualno naelektrisanje Q_2 , a sa \mathbf{F}_{21} elektrostatičku silu koja deluje na Q_1 . Kulonov zakon se u vektorskom obliku može formulisati na sledeći način:

- **Kulonov zakon:** Ako se punktualna naelektrisanja Q_1 i Q_2 nalaze u vakuumu i ako je vektor položaja drugog naelektrisanja u odnosu na prvo $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}$, tada se sile mehaničkog dejstva \mathbf{F}_{12} i \mathbf{F}_{21} (videti Sl.1) mogu predstaviti sledećim relacijama:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \mathbf{r}_{12}, \quad \mathbf{F}_{21} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \mathbf{r}_{21}, \quad \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}, \quad r = |\mathbf{r}|,$$

gde je sa \mathbf{r}_{012} označen jedinični, ort vektor $\mathbf{r}_{012} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|}$.

U vezi Kulonovog zakona mogu se dati sledeće napomene:

- U elektrostatici važi zakon akcije i reakcije, kako u mikroskopskom pogledu — između dva punktualna naelektrisanja, tako i u makroskopskom između dva naelektrisana tela.
- Kada se naelektrisana tela nalaze u homogenom dielektriku permitivnosti $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$, pokazuje se da je intenzitet Kulonovih sila ϵ_r puta manji nego kada se ista tela nalaze u vakuumu. Kulonov zakon se tada piše u sledećem obliku:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^3} \cdot \mathbf{r}_{12}, \quad \mathbf{F}_{21} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^3} \cdot \mathbf{r}_{21}, \quad \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}, \quad r = |\mathbf{r}|.$$

- Kulonova sila deluje u pravcu određenom položajem punktualnih naelektrisanja, a njen smer je odbojan ako su naelektrisanja istorodna, a privlačan kada su raznorodna.

5. Elektrostatičko polje

Elektrostatičko polje je *konzervativno bezvrtložno fizičko polje* (kao i gravitaciono), što znači da je *rad sila polja* pri punom obilasku probnog punktualnog naelektrisanja po bilo kojoj *zatvorenoj putanji* (konturi)

ravan nuli. Elektrostatičko polje je i *izvorno* fizičko polje, jer ima svoje izvore i ponore — izvori su tamo gde su pozitivna, a *ponori* tamo gde su negativna naelektrisanja. Na sl. 2a prikazan je spektar elektrostatičkog polja sa jednim izvorom (ili ponorom). Jasno su uočljive radijalne linije koje obrazuju spektar polja i koje se zovu *linije elektrostatičkog polja*. Na sl. 2b prikazan je spektar bezvrtloznog polja sa dva izvora (ili dva ponora). Donji izvor je očigledno "jači" od gornjeg, jer dominantno utiče na izgled rezultantnog spektra. Ova slika odgovara spektru elektrostatičkog polja koje stvaraju dva istoredna nejednaka naelektrisanja.



(a)



(b)

Sl. 2

Za razliku od elektrostatičkog, magnetsko polje nije ni izvorno ni konzervativno, već vrtložno. Zbog toga su linije njegovog spektra konture — one nemaju ni početak ni kraj (zatvaraju se same u sebe). Na sl. 3a prikazan je spektar bezizvornog vrtložnog polja sa jednim vrtlogom, a na sl. 3b spektar bezizvornog vrtložnog polja sa dva vrtloženja u suprotnim smerovima.



(a)



(b)

Sl. 3

Elektrostatičko, odnosno električno polje naročito je fizičko stanje u prostoru u kome se nalaze naelektrisanja. Njegova osnovna manifestacija je mehaničko dejstvo (elektrostatička, ili Kulonova sila) na uneto *probno* pozitivno punktualno naelektrisanje ΔQ u obliku male naelektrisane kuglice, što se može iskoristiti za karakterizaciju tog polja preko *vektora jačine električnog polja* \mathbf{E} :

- *Vektor jačine elektrostatičkog, odnosno električnog polja \mathbf{E} u nekoj tački u prostoru definisan je količnikom vektora elektrostatičke (Kulonove) sile \mathbf{F} koja deluje na uneto (probno) pozitivno punktualno naelektrisanje ΔQ ($\Delta Q \neq 0$) i samog naelektrisanja ΔQ :*

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{\Delta Q} .$$

Veličina $E=|\mathbf{E}|$ zove se intenzitet ili jačina elektrostatičkog, odnosno električnog polja. Jedinica za intenzitet polja je ili [N/C], ili [V/m], gde je [V]-Volt jedinica za električni potencijal i napon.

Posmatrajmo sada usamljeno punktualno naelektrisanje Q u vakuumu. Ako se u neku tačku njegovog polja određenu vektorom položaja \mathbf{r} u odnosu na to naelektrisanje unese *probno punktualno naelektrisanje* ΔQ , na ΔQ će delovati Kulonova (mehanička) sila:

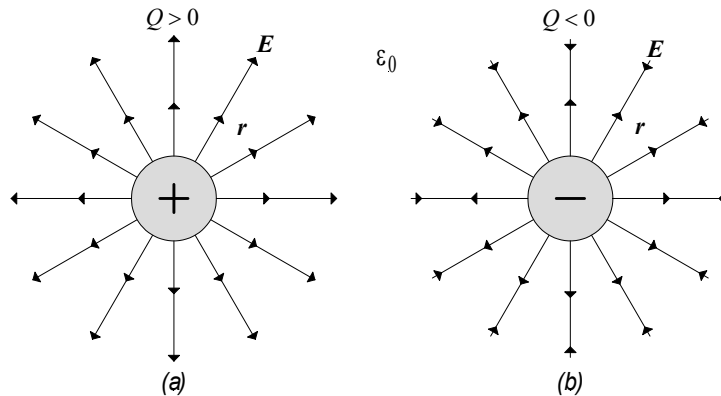
$$\mathbf{F} = \frac{Q \cdot \Delta Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \mathbf{r}_0, \quad r = |\mathbf{r}|, \quad \mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}.$$

Tada su vektor jačine električnog polja \mathbf{E} naelektrisanja Q i njegov intenzitet E , određeni izrazima:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{\Delta Q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \mathbf{r}_0, \quad E = |\mathbf{E}| = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r = |\mathbf{r}|.$$

- Linije električnog polja, ili linije sile, predstavljaju zamišljene orijentisane linije sa osobinom da tangenta u svakoj njihovoj tački ima pravac vektora jačine električnog polja u toj tački. Skup linija polja obrazuje sliku, ili spektar polja. Linije polja izviru iz pozitivnih, a uviru u negativna naelektrisanja i one se ne mogu presecati, pošto je vektor jačine električnog polja jednoznačna funkcija koordinata tačaka u prostoru.

Na sl. 4a i 4b prikazan je spektar električnog polja usamljenog punktualnog naelektrisanja Q u vakuumu, u slučaju kada je $Q > 0$ i kada je $Q < 0$. U oba slučaja, sa slike jasno se vidi da polje ima *radijalan* karakter i da njegove linije "izviru" iz pozitivnog, a "uviru" u negativno naelektrisanje.



Sl. 4

Posmatrajmo sada sistem od n punktualnih naelektrisanja Q_i ($i = \overline{1, n}$) u vakuumu koji predstavlja fizički *linearnu* sredinu. Vektor jačine električnog polja u tački određenoj vektorom položaja \mathbf{r}_i , u odnosu na punktualno naelektrisanje Q_i ($i = \overline{1, n}$), određuje se *vektorskom superpozicijom* polja koja u toj tački stvaraju pojedina punktualna naelektrisanja:

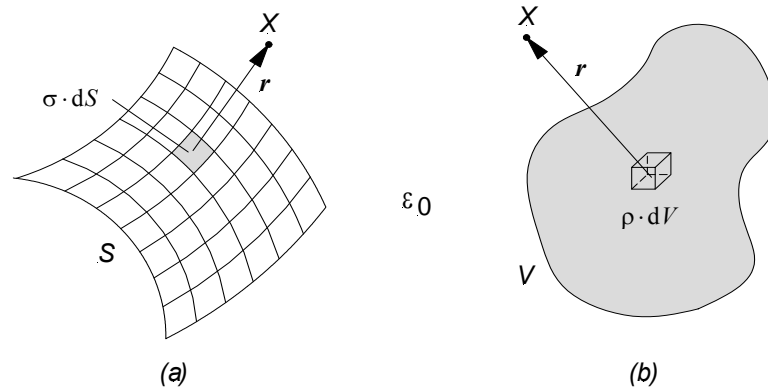
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \cdot \mathbf{r}_{0i}, \quad r_i = |\mathbf{r}_i|, \quad \mathbf{r}_{0i} = \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|}, \quad (i = \overline{1, n}).$$

Vektor jačine električnog polja usamljene površi u vakuumu naelektrisanog sa *površinskom gustinom* naelektrisanja $\sigma = dQ/dS$ (sl. 5a) — u tački X određenoj vektorom položaja \mathbf{r} u odnosu na pojedine tačke površi, dobija se *vektorskom integracijom* polja *elementarnih* naelektrisanja $dQ = \sigma \cdot dS$:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_S \frac{\sigma \cdot dS}{r^3} \cdot \mathbf{r}, \quad r = |\mathbf{r}|$$

Vektor jačine električnog polja usamljenog domena V u vakuumu naelektrisanog sa *zapreminskom gustinom* naelektrisanja $\rho = dQ/dV$ (sl. 5b) — u tački X određenoj vektorom položaja \mathbf{r} u odnosu na tačke domena, dobija se *vektorskom integracijom* polja *elementarnih* naelektrisanja $dQ = \rho \cdot dV$:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \oint_V \frac{\rho \cdot dV}{r^3} \cdot \mathbf{r}, \quad r = |\mathbf{r}|$$



Sl. 5

Spektar električnog polja pruža informaciju, ne samo o pravcu i smeru vektora \mathbf{E} , već i o intenzitetu (jačini) polja. Intenzitet električnog polja u bilo kojoj tački srazmeran je gustini linija, tj. broju linija polja po jedinici površine.

6. Potencijal električnog polja i napon

Elektrostatičko polje je konzervativno fizičko polje, pa je rad A Kulonovih sila \mathbf{F} pri jednom obrtu unetog probnog punktualnog naelektrisanja $\Delta Q \neq 0$, po proizvoljno odabranoj konturi C u polju, jednak nuli:

$$A = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \Delta Q \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (\mathbf{F} = \Delta Q \cdot \mathbf{E}).$$

- Električni potencijal bilo koje tačke A u električnom polju \mathbf{E} u odnosu na referentnu tačku R je relativna, algebarska, fizička veličina, definisana na sledeći način:

$$V_A = \int_A^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad \leftarrow \text{po bilo kojoj putanji integracije!}$$

Referentna tačka sistema R , ili tačka nultog potencijala, može se izabrati proizvoljno, ali se pri njenom izboru, ipak, rukovodimo prirodom rešavanog problema. U velikom broju praktičnih slučajeva referentna tačka se nalazi u beskonačnosti (tj. $R \rightarrow \infty$), tako da je:

$$V_A = \int_A^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad \leftarrow (\text{po bilo kojoj putanji integracije}).$$

- ⇔ Potencijal tačke u električnom polju je relativna fizička veličina, jer zavisi od izbora referentne tačke R . Neka je V_X potencijal tačke X u odnosu na referentnu tačku R , a V_X^* potencijal tačke X u odnosu na neku drugu referentnu tačku R^* . Koristeći prethodnu definiciju moguće je za bilo koju izabranu putanju integracije napisati:

$$V_X^* - V_X = \int_X^{R^*} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_X^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_X^{R^*} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_R^X \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_R^{R^*} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \text{const.}$$

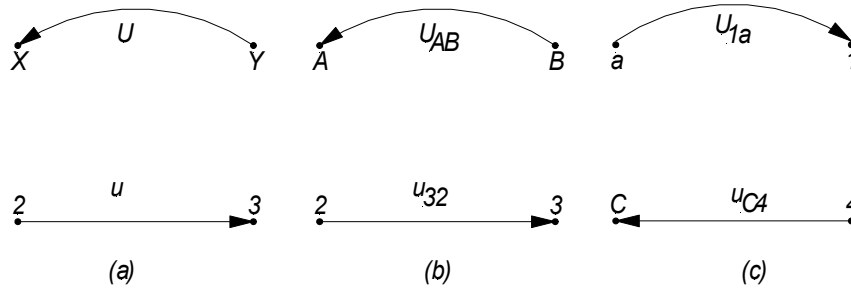
- Električni napon U_{AB} između tačaka A i B u polju definiše se kao razlika potencijala tih tačaka. Napon je apsolutna, algebarska, fizička veličina i njegova jedinica je kao za potencijal [V]-Volt:

$$U_{AB} = V_A - V_B = \int_A^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_B^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_R^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad U_{AB} = -U_{BA}.$$

Putanja integracije u prethodnoj relaciji je proizvoljna.

Prema usvojenoj konvenciji o označavanju napona koristi se strelica i veliko slovo " U " ako je napon konstantan, a vremenski promenljivi naponi označavaju se strelicom i malim slovom " u " (sl.6). Slovima " U " i " u " često se dodaje i indeks. Strelica za napon stoji kod one tačke koja je označena prvim indeksom. U

svakom od slučajeva na sl. 6 napon je prema definiciji jednak razlici potencijala tačke kod vrha strelice i tačke na suprotnoj strani.



Sl. 6

Ako se punktualno naelektrisanje Q nalazi u tački X električnog polja sa potencijalom V_X , tada na njega deluje Kulonova sila $\mathbf{F}=Q\cdot\mathbf{E}$, pa je:

$$V_X \cdot Q = Q \cdot \int_X^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_X^R \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad \leftarrow \text{(po bilo kojoj putanji integracije).}$$

Dakle, potencijal tačke X numerički je jednak radu Kulonovih sila izvršenom pri premeštanju jediničnog punktualnog naelektrisanja $Q=+1[\text{C}]$ iz tačke X u referentnu tačku R sistema. Kada je $V_X \cdot Q > 0$ sile polja vrše rad na račun elektrostatičke energije sistema koja se smanjuje. Kada je $V_X \cdot Q < 0$, rad pri navedenom premeštanju naelektrisanja vrše spoljašnje sile \mathbf{F}_S protiv elektrostatičkih ($\mathbf{F}_S = -\mathbf{F}$) i njihov rad se pretvara u pozitivan priraštaj elektrostatičke energije sistema.

Na osnovu prethodnog sledi:

$$Q \cdot U_{AB} = Q \cdot (V_A - V_B) = Q \cdot \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l},$$

Potencijal tačke X u električnom polju usamljenog punktualnog naelektrisanja Q u vakuumu može se odrediti na osnovu definicije potencijala:

$$V_X = \int_X^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_X^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_X^R \frac{dl \cdot \cos\angle(\mathbf{r}, d\mathbf{l})}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{r_X}^{r_R} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_X} - \frac{1}{r_R} \right),$$

$$r = |\mathbf{r}|, \quad r_X = |\mathbf{r}_X|, \quad r_R = |\mathbf{r}_R| \quad \text{ i } \quad dl = |d\mathbf{l}|.$$

Za putanju integracije smo usvojili pravac kolinearan vektoru jačine polja \mathbf{E} , pa je $\cos\angle(\mathbf{r}, d\mathbf{l}) = 1$. Ako se u prethodnoj relaciji usvoji referentna tačka u beskonačnosti, tj. $r_R \rightarrow \infty$, tada se dobija

$$V_X = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_X}.$$

Prema principu superpozicije za vakuum kao fizički linearnu sredinu, a uz uslov da $R \rightarrow \infty$, odmah slede relacije za potencijal tačke X u električnom polju u vakuumu koje potiče od:

(a) usamljene površi S sa površinskom gustinom naelektrisanja σ :

$$V_X = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_S \frac{\sigma \cdot dS}{r}$$

(b) usamljenog domena V sa zapreminskom gustinom naelektrisanja ρ :

$$V_X = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \oint_V \frac{\rho \cdot dV}{r}$$

Geometrijsko mesto tačaka istog potencijala u električnom polju zove se *ekvipotencijalna površ*. Linije električnog polja upravne su na ekvipotencijalne površi u tačkama u kojima ih prosecaju.

⇔ Vektor elektrostatičkog polja \mathbf{E} u svakoj tački ima pravac i smer u kome potencijal polja najbrže opada. Potencijal $V(x, y, z)$, kao funkcija x, y i z , ne može imati tačke prekida prve vrste.

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \text{tj. } \mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \mathbf{k} = -\text{grad } V(x, y, z)$$

1. Zadatak: Tri mala tela, naelektrisanja $Q_1 = Q_2 = 10^{-10}[\text{C}]$ i $Q_3 = -20 \cdot 10^{-10}[\text{C}]$, nalaze se u vazduhu, u temenima jednakostraničnog trougla stranice $a=1[\text{cm}]$. Odrediti vektor jačine elektrostatičke sile koja deluje na telo naelektrisanja Q_3 .

Rešenje:

Kulonov zakon definiše silu uzajamnog dejstva dva tačkasta naelektrisanja Q_1 i Q_2 , koja se nalaze u vazduhu na međusobnom rastojanju r_{12} :

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \text{ort } \mathbf{r}_{12}$$

Dielektrična permitivnost vazduha (kao i vakuum) je $\epsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi)[\text{C}^2/\text{Nm}^2]$, a $\text{ort } \mathbf{r}_{12}$ je jedinični vektor položaja naelektrisanog tela 2 u odnosu na naelektrisano telo 1.

Shodno ovome, na tačkasto naelektrisanje Q_3 deluju sile koje potiču od tačkastih naelektrisanja Q_1 i Q_2 , respektivno:

$$\mathbf{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_3}{r^2} \cdot \text{ort } \mathbf{r}_{13} = -18 \cdot 10^{-6}[\text{N}] \cdot \text{ort } \mathbf{r}_{13}$$

$$\mathbf{F}_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_2 \cdot Q_3}{r^2} \cdot \text{ort } \mathbf{r}_{23} = -18 \cdot 10^{-6}[\text{N}] \cdot \text{ort } \mathbf{r}_{23}$$

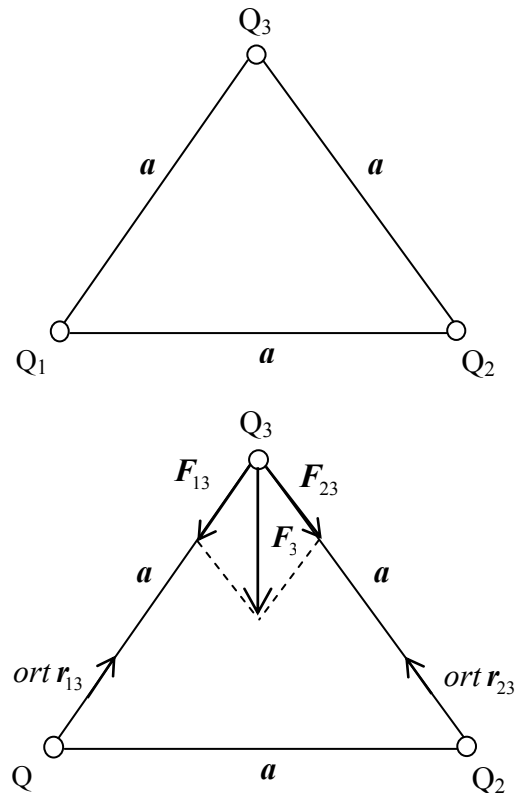
Rezultantna sila na tačkasto naelektrisanje Q_3 je onda:

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23}.$$

Intenzitet ove sile je:

$$F_3 = \sqrt{F_{13}^2 + F_{23}^2 - 2F_{13}F_{23} \cdot \cos(\pi - \angle(\mathbf{F}_{13}, \mathbf{F}_{23}))} = 31[\mu\text{N}].$$

Vektor \mathbf{F}_3 sa vektorima \mathbf{F}_{13} i \mathbf{F}_{23} zaklapa ugao $\pi/6$.



2. Zadatak: Dva punktualna naelektrisanja $Q_1=1.2[\text{pC}]$ i $Q_2=-2.844[\text{pC}]$ nalaze se na rastojanju $d=5[\text{cm}]$. Odrediti vektor jačine elektrostatičkog polja \mathbf{E} u tački A koja se nalazi na rastojanju $r_1=3[\text{cm}]$ od Q_1 i $r_2=4[\text{cm}]$ od Q_2 .

Rešenje:

Vektor jačine električnog polja u tački A koje potiče od naelektrisanja Q_1 je:

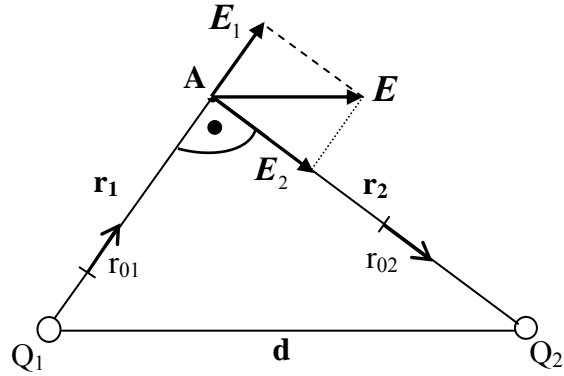
$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} \cdot \mathbf{r}_{01} = 12[\text{V/m}] \cdot \mathbf{r}_{01}.$$

Vektor jačine električnog polja u tački A koje potiče od Q_2 je:

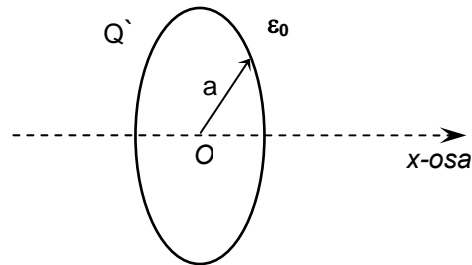
$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|Q_2|}{r_2^2} \cdot \mathbf{r}_{02} = 16[\text{V/m}] \cdot \mathbf{r}_{02}.$$

Primitimo da je trougao Q_1Q_2A pravougli. Vektor resultantnog elektrostatičkog polja dobija se vektorskim sabiranjem $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ i prikazan je na slici. Pravac vektora \mathbf{E} paralelan je sa pravcem Q_1Q_2 , a smer je kao na slici. Intenzitet ovog vektora je

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20[\text{V/m}].$$



3. Zadatak: Tanka kružna provodna kontura poluprečnika a ravnomerno je naelektrisana naelektrisanjem podužne gustine Q' i nalazi se u vazduhu. Odrediti potencijal i vektor jačine električnog polja \mathbf{E} u tačkama na osi konture.



Rešenje:

Posmatrajmo elementarni delić konture dužine dl koji je naelektrisan količinom naelektrisanja $Q'dl$. Odredimo elementarni potencijal dV_A u tački A na x-osi koji stvara ovaj infinitesimalno mali delić konture.

Rastojanje r tačke A od izvora polja mnogo je veće od dimenzije elementa dl , pa se može smatrati da se tačka A nalazi u polju tačkastog naelektrisanja. Usvajajući referentnu tačku u beskonačnosti, za elementarni potencijal tačke A u polju elementarnog naelektrisanja $Q'dl$, u vazduhu, se dobija

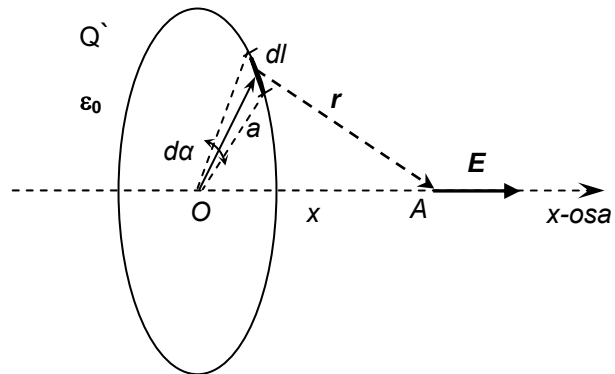
$$dV_A = \frac{Q'dl}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Kako je $dl = a d\alpha$, gde je $d\alpha$ elementarni ugao pod kojim se element dl „vidi“ iz centra konture i $r = \sqrt{x^2 + a^2}$ to je:

$$dV_A = \frac{Q'a d\alpha}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(a^2 + x^2)}}.$$

Ukupan potencijal tačke A u polju naelektrisane kružne konture dobija se sabiranjem, tj. integracijom svih elementarnih doprinosa duž konture. Integraciju je pogodno izvršiti po uglu α :

$$V_A = \int_0^{2\pi} \frac{Q'a d\alpha}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(a^2 + x^2)}} = \frac{Q'a}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(a^2 + x^2)}} \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{Q'a}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(a^2 + x^2)}} \cdot 2\pi = \frac{Q'a}{2\epsilon_0 \sqrt{(a^2 + x^2)}}.$$



Tačka A naravno može biti bilo koja tačka na x-osi, pa se za potencijal tačaka na osi konture dobija:

$$V(x) = \frac{Q'a}{2\epsilon_0 \sqrt{(a^2 + x^2)}}.$$

Primetimo da je potencijal skalarna veličina i da opada sa udaljavanjem od centra konture.

Vektor jačine električnog polja možemo sada vrlo jednostavno odrediti kao prvi izvod potencijala polja po promenljivoj koordinati:

$$\mathbf{E}(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \mathbf{x}_0, \text{ gde je } \mathbf{x}_0 \text{ jedinični vektor } x\text{-ose. Diferenciranjem se dobija:}$$

$$\mathbf{E}(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \mathbf{x}_0 = -\frac{Q'a}{2\epsilon_0} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} \right] \cdot \mathbf{x}_0 = \frac{Q'ax}{2\epsilon_0 (a^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \mathbf{x}_0.$$

Zbog simetrije jačina električnog polja u centru neelektrisanе konture je 0.

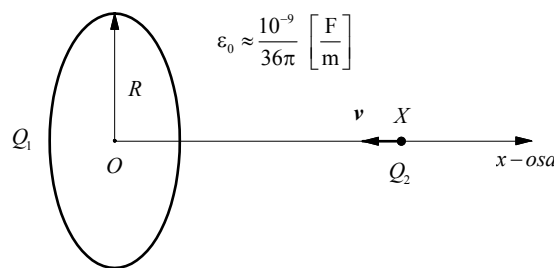
Do istog rezultata se moglo doći i vektorskim sabiranjem elementarnih jačina polja $d\mathbf{E}$ od svakog naelektrisanog delića konture $Q'dl$, ali je to matematički znatno zahtevnije.

► Ponovimo vezu između vektora jačine polja i potencijala za jednodimenzioni slučaj i referentnu tačku u beskonačnosti:

$$V(x) = \int_x^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}, \quad \mathbf{E}(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \cdot \mathbf{x}_0$$

4. Zadatak: Vrlo tanak i usamljen metalni prsten poluprečnika R nalazi se u vakuumu i ravnomerno je naelektrisan količinom elektriciteta Q_1 . Iz veoma udaljene tačke X na x -osi (praktično na nultom potencijalu), pušteno je da iz mirovanja krene punktualno naelektrisanje Q_2 mase m . Odrediti njegovu brzinu pri prolasku kroz centar prstena O . Usvojiti da je potencijal tačaka u beskonačnosti ravan nuli.

Podaci: $Q_1=0.2[\text{nC}]$, $Q_2=-0.1[\text{nC}]$, $m=1.8[\text{g}]$ i $R=20[\text{cm}]$.



Rešenje:

Kako su naelektrisanja prstena $Q_1=+0.2[\text{nC}]$ i punktualnog naelektrisanja $Q_2=-0.1[\text{nC}]$ suprotnog znaka, to će pozitivno naelektrisani prsten privlačiti negativno naelektrisano malo telo mase m . Rad sila električnog polja se transformiše u povećanje kinetičke energije naelektrisane čestice.

Na putu od veoma udaljene tačke X na x -osi, do centra konture sile električnog polja izvrše rad $A = Q_2(V_X - V_0)$, gde je sa V_X označen potencijal tačke X , a sa V_0 potencijal centra prstena. Dalje je

$$A = Q_2(V_X - V_0) = \frac{1}{2}m(v_0^2 - v_X^2). \text{ Kako je } V_X = 0 \text{ i } v_X = 0 \text{ dobija se } -Q_2V_0 = \frac{1}{2}mv_0^2, \text{ gde je } v_0 \text{ brzina}$$

čestice pri prolasku kroz centar prstena. Rešavanjem se dobija:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2|Q_2|V_0}{m}}.$$

Koristeći se rešenjem prethodnog zadatka:

$$V(x) = \frac{Q'a}{2\epsilon_0 \sqrt{(a^2 + x^2)}}, \text{ za potencijal centra prstena dobijamo}$$

$$V(x=0) = \frac{Q'a}{2\varepsilon_0\sqrt{(a^2)}} = \frac{Q'}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{Q_1}{2\pi R}, \text{ jer je } a=R \text{ (poluprečnik prstena) i } Q' = \frac{Q_1}{2\pi R}.$$

Zamenom konačno dobijamo:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2|Q_2|V_0}{m}} = \sqrt{\frac{2|Q_2|}{m} \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{Q_1}{2\pi R}} = \sqrt{\frac{Q_1|Q_2|}{2\pi\varepsilon_0 Rm}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{Q_1|Q_2|}{2\pi\varepsilon_0 Rm}} = \sqrt{\frac{0.2 \cdot 10^{-9} \cdot 0.1 \cdot 10^{-9}}{2\pi \frac{10^{-9}}{36\pi} 0.2 \cdot 1.8 \cdot 10^{-3}}} = 10^{-3} [\text{m/s}]$$

► Ponovimo: rad pri pomeranju tačkastog naelektrisanja Q iz tačke A u tačku B u elektrostatičkom polju je $A = Q \cdot U_{AB} = Q \cdot (V_A - V_B)$:

ako je $A > 0$ sile polja vrše rad,

ako je $A < 0$ rad vrše strane sile protiv sila polja.

5. Zadatak: Četiri punktualna naelektrisanja leže u temenima kvadrata dijagonale $2a$, kao na slici. Sredina je vakuum. Odrediti:

a) Potencijal električnog polja u centru kvadrata u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti.

b) Brzinu v koju u centru kvadrata ima mala uljna kapljica mase m i naelektrisanja Q_2 , koja dolazi iz beskonačnosti polazeći iz stanja mirovanja. Uticaj gravitacije zanemariti.

c) Odrediti Kulonovu silu F koja deluje na uljnu kapljicu kada se ova nađe u centru kvadrata.

Podaci: $Q_1 = -Q_2 = 0.1$ [nC], $m = 0.4$ [g], $a = 4.5$ [cm] i $\varepsilon_0 = 10^{-9} / 36\pi$ [F/m] .

Rešenje:

a) Potencijal električnog polja u centru kvadrata možemo odrediti primenom principa superpozicije.

$V_0 = V_0(Q_1) + V_0(2Q_1) + V_0(3Q_1) + V_0(4Q_1)$, gde su

$$V_0(Q_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{a}, V_0(2Q_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2Q_1}{a}, V_0(3Q_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3Q_1}{a}$$

i $V_0(4Q_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4Q_1}{a}$ potencijali tačke O u poljima svakog od

punktualnih naelektrisanja u temenima kvadrata ponaosob.

Sada je:

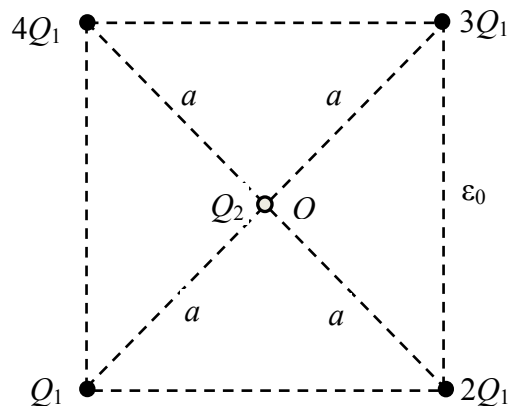
$$V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{10 \cdot Q_1}{a} = 200 [\text{V}].$$

b) Analogno prethodnom zadatku, rad sila električnog polja pri premeštanju tačkastog naelektrisanja Q_2 iz beskonačnosti u centar kvadrata, pretvara se u promenu kinetičke energije uljne kapljice.

$$A = Q_2(V_\infty - V_0) = \frac{1}{2} m(v_0^2 - v_\infty^2).$$

Kako je $V_\infty = 0$ i $v_\infty = 0$, jer kapljica kreće iz stanja mirovanja, dobija se

$$-Q_2 V_0 = \frac{1}{2} m v_0^2, \text{ gde je } v_0 \text{ brzina kapljice u centru kvadrata.}$$



Konačno dobijamo: $v_0 = \sqrt{\frac{2|Q_2|V_0}{m}} = 10^{-2} [\text{m/s}]$.

c) Rezultantna Kulonova sila koja deluje na kapljicu u centru kvadrata određuje se vektorskim sabiranjem sila kojima naelektrisanja u temenima kvadrata deluju na kapljicu. Kako su naelektrisanja u temenima kvadrata pozitivna, a uljna kapljica negativno naelektrisana, to su sve 4 sile privlačne, sa pravicima i smerovima kao na slici.

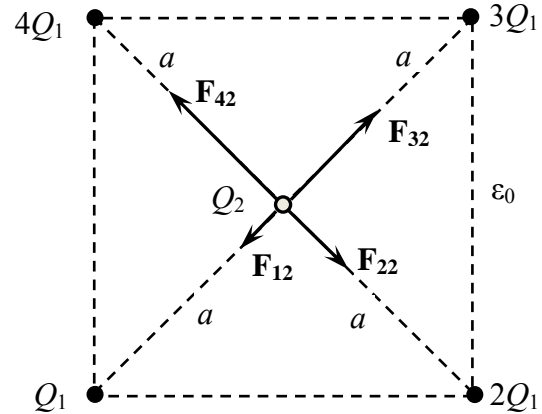
Intenziteti ovih sila su:

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot |Q_2|}{a^2},$$

$$F_{22} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2Q_1 \cdot |Q_2|}{a^2},$$

$$F_{32} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3Q_1 \cdot |Q_2|}{a^2},$$

$$F_{42} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4Q_1 \cdot |Q_2|}{a^2}.$$



Ako vektorski saberemo sile duž dijagonala kvadrata dobijamo

$$F_{R1} = F_{32} - F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2Q_1 \cdot |Q_2|}{a^2} \text{ i}$$

$$F_{R2} = F_{42} - F_{22} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2Q_1 \cdot |Q_2|}{a^2} \text{ sa pravicima i smerovima}$$

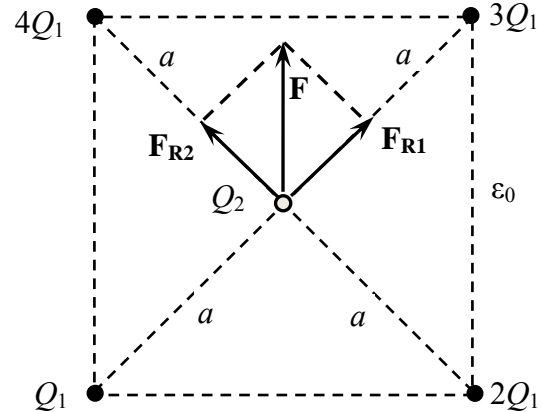
kao na slici.

Očigledno je $F_{R1} = F_{R2}$ pa je intenzitet rezultujuće sile F

$$F = \sqrt{2} \cdot F_{R1} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2Q_1 \cdot |Q_2|}{a^2}, \text{ odnosno}$$

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot |Q_2|}{a^2} = 125.7 [\text{nN}] \text{ sa pravcem i smerom}$$

kao na slici.



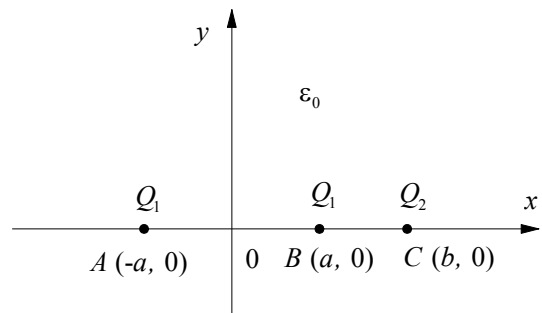
Zadataci za samostalan rad:

6. Zadatak: Dva jednaka nepokretna punktualna naelektrisanja Q_1 nalaze se u tačkama A i B u vakuumu kao na slici. U tački C pušteno je da iz mirovanja krene pokretno punktualno naelektrisanje Q_2 mase m . Odrediti njegovu trajektoriju i brzinu u beskonačnosti. Usvojiti da je potencijal beskonačno udaljenih tačaka ravan nuli.

Podaci: $Q_1=4Q_2=0.6 [\text{nC}]$, $m=9 [\text{gr}]$, $a=10 [\text{cm}]$, $b=20 [\text{cm}]$ i $\epsilon_0 \approx 10^{-9}/36\pi [\text{F/m}]$.

Rešenje:

$$\Delta E_K = A_{\text{nad } Q_2}, \quad m \cdot v_\infty^2 / 2 - m \cdot v_C^2 / 2 = Q_2 (V_C - V_\infty), \quad v_C = 0, \quad V_\infty = 0.$$



$$V_C = V_C|_{Q_1 \text{ u tački } A} + V_C|_{Q_1 \text{ u tački } B}, \text{ gde su } V_C|_{Q_1 \text{ u tački } A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{a+b} \text{ i } V_C|_{Q_1 \text{ u tački } B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{b-a}$$

$$\Rightarrow V_C = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2b}{b^2 - a^2}. \text{ Konačno } m \cdot v_\infty^2 / 2 = Q_2 V_C, \text{ pa je } v_\infty = \sqrt{\frac{Q_1 Q_2}{\pi\epsilon_0 m} \frac{b}{b^2 - a^2}}.$$

7. Zadatak: Usamljena metalna sfera nalazi se u vakuumu i naelektrisana je količinom elektriciteta Q_1 . U tački $A(a, 0)$ pušteno je da iz mirovanja krene punktualno naelektrisanje Q_2 mase m . Odrediti njegovu brzinu u tački $B(b, 0)$. Usvojiti da je potencijal beskonačno udaljenih tačaka ravan nuli.

Podaci: $Q_1 = 1.8$ [nC], $Q_2 = 0.5$ [nC], $m = 1.8$ [g], $a = 36$ [cm] i $b = 1$ [m].

Rešenje:

Postupajući kao u prethodnom zadatku dobija se

$$\Delta E_K = A_{nad Q_2}, \quad m \cdot \frac{v_B^2}{2} - m \cdot \frac{v_A^2}{2} = Q_2 (V_A - V_B) = Q_2 U_{AB}, \quad v_A = 0. \quad U_{AB} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right),$$

$$v_B = \sqrt{\frac{Q_1 Q_2}{2\pi\epsilon_0 m} \frac{b-a}{ab}}.$$

